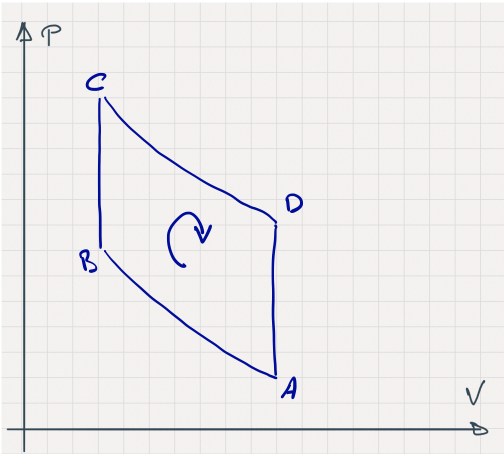
III. Moteur d'Otto. 24 points.

Le cycle d'Otto est un cycle **moteur** composé de **deux adiabatiques** et **deux isochores**. C'est le cycle modèle des moteurs à essence. Dans une première partie, on considère n moles de gaz dans une enceinte fermée, auxquelles on fait subir ces transformations. On considère initialement les adiabatiques réversibles.

Note : Les questions 1 à 3, 7, 8 et 10 à 13, sont des questions de cours. $\sum = 15$

1,5

-1- Représenter ce cycle dans un diagramme p-V, en nommant les sommets dans l'ordre successif A, B, C et D. A étant le point de température la plus basse.



0,5 adiabatiques
0,5 isochore
0,5 sens

2

-2- Pour un gaz parfait, calculer *Q* et *W* échangés à chaque étape ainsi que l'énergie interne, ΔU, et l'entropie, ΔS. On exprimera toutes les grandeurs en fonction de n, R et la capacité calorifique molaire à volume constant $C_{v,\mathrm{mol}}$ ainsi que des températures aux quatre sommets du cycle.

		AB	BC	CD	DA
0,5	W	$nC_{vm}(T_B-T_A)$	0	$nC_{vm}(T_D-T_C)$	0
0,5	Q	0	$nC_{vm}(T_C-T_B)$	0	$nC_{vm}(T_A-T_D)$
0,5	ΔU	$nC_{vm}(T_B-T_A)$	$nC_{vm}(T_C-T_B)$	$nC_{vm}(T_D-T_C)$	$nC_{vm}(T_A-T_D)$
0,5	ΔS	0	$nC_{vm}\ln\frac{T_C}{T_B}$	0	$nC_{vm}\ln\frac{T_A}{T_D}$

1,5

-3- Montrer que $T_A / T_D = T_B / T_C$

-4- Soit la variation d'entropie ΔS pour un gaz parfait entre un état initial à T_i, P_i et de volume V_i et un état final (T_f, P_f, V_f). Exprimer ΔS en fonction de V_i, V_f, T_i, T_f , n, R et $C_{v,\mathrm{mol}}$.

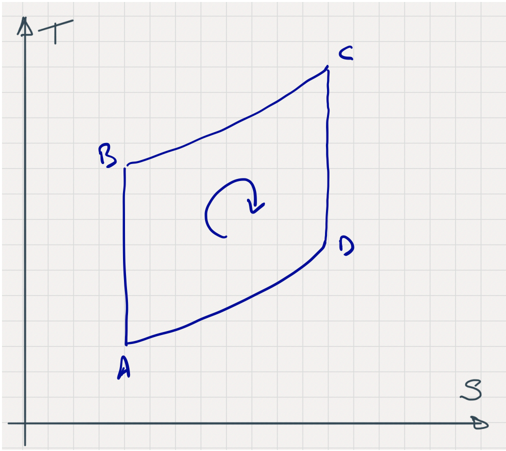
1

$$\Delta S = nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + nC_{vm}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

0,5 -5- En déduire l'aspect d'une transformation réversible isochore d'un gaz parfait dans un diagramme T-S.

6- Représenter le même cycle dans un diagramme (T, S) en prenant soin à la position relative des points A B C et D. Expliquez comment vous obtenez la position des points.

1



0,5 -7- Donner l'interprétation physique de l'aire à l'intérieur d'un cycle sur un diagramme T-S. Expliquez pourquoi le cycle tourne dans le même sens dans le diagramme T-S que dans le diagramme p-V.

On affine la modélisation en considérant que c'est un moteur à combustion interne. La chaleur fournie vient de la combustion, qui a lieu durant l'isochore au volume le plus faible. On supposera que lors de la combustion le nombre de moles reste constant, et tous les produits se comportent comme des gaz parfaits en mélange parfaits.

3 -8- Rappeler la définition de l'efficacité, η, d'un cycle moteur. Exprimer l'efficacité du cycle en fonction de chaleurs échangées $Q_{i,j}$ sur les différentes parties du cycle, puis en fonction des températures des quatre sommets du cycle.

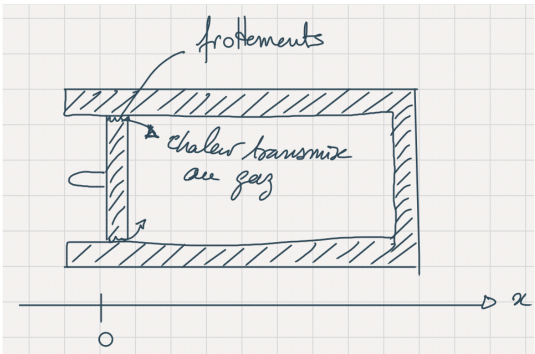
1	Définition :	$\eta = \frac{-W}{\text{énergie fournie}} = -\frac{W}{Q_C}$
1	En fonction des $Q_{i,j}$	$\eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$
1	En fonction de T_A, T_B, T_C, T_D	$\eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$ $\left(= 1 - \frac{T_D}{T_C} = 1 - \frac{T_A}{T_B} \right)$

On suppose maintenant que le piston, en service durant les adiabatiques n'est pas parfait et subit une force de frottement de norme constante F_f, lors du déplacement. Le piston a une section S. On suppose aussi que les volumes extrêmes restent les mêmes (la course du piston reste la même.)

1 -9- Est-ce que le dessin dans le diagramme p-V reste identique ou bien change-t-il ?

On appelle maintenant A', B', C' et D' les nouveaux points de fonctionnement. On considère que le premier point A', qui est le début de la compression est confondu avec le point A (ceci est justifié par le fait que c'est le point correspondant à la fin de l'admission, l'air et l'essence fraîches sont à pression et températures ambiantes.) La compression et la détente sont considérées quasi-statiques, malgré les frottements.

Le piston est considéré isolant thermique et on néglige sa capacité calorifique devant celle du gaz. **Toute la chaleur générée par les frottements est donc transmise au gaz**.



2

-10- Écrire la relation liant la pression extérieure, p_{ext}, à la pression du gaz dans le piston, p, F_f et S section du piston.

1,5 0,5

p_{ext} = $P + \frac{Ff}{S}$ (compression) $P_{ext} = P - \frac{Ff}{S}$ (détente)

1,5

-11- Montrer que au cours de la compression : $dU_{comp} = -(p + F_f /S)\, dV$.

-12- Calculer l'expression de dU sur la détente avec frottements, en fonction de p, F_f, S et dV.

1,5

dU_{det} = $-\left(p - \frac{Ff}{S}\right) dV$

1,5

-13- Montrer que $C_v dT = -pdV - \frac{F_f}{S}dV$ et que $C_p dT = Vdp - \frac{F_f}{S}dV$ à la compression

2

-14- Montrer que $-\gamma \frac{dV}{V} = \frac{dP}{P+a}$ avec a une constante dépendant de γ, F_f et S. Exprimer a.

à la compression

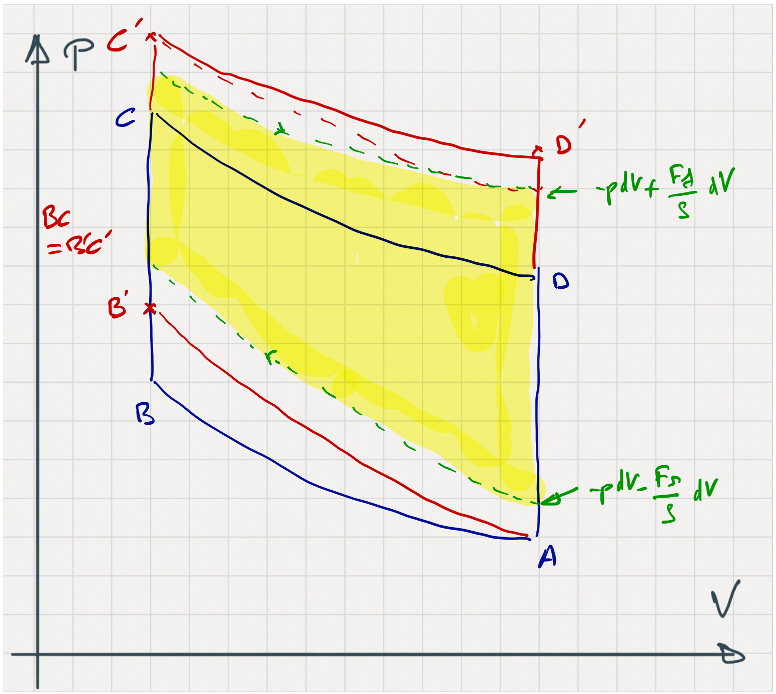
a = $\frac{Ff}{S} \frac{\gamma-1}{\gamma}$

On admettra que cette équation différentielle s'intègre en $(P+a)V^{\gamma} = \text{Cst}$ et que $0 < a < F_f/S$.

2,5

-15- Sur le diagramme p-V tracer :

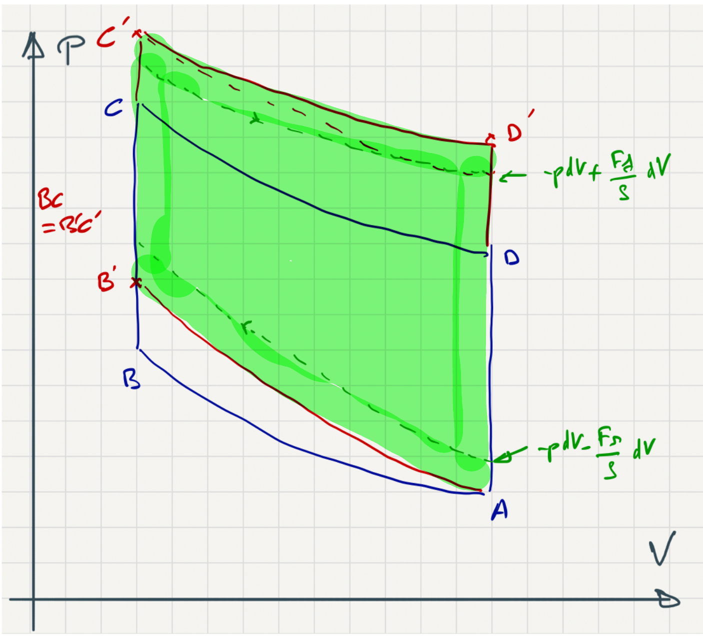
0,5 – La compression adiabatique réversible du cas idéal.(AB).
0,5 – La position du point B'.
0,5 – L'allure de la courbe $p(V)$ durant de la compression quasi-statique avec frottements.
0,5 – La position du point C' (en supposant que la chaleur fournie par la combustion est inchangée).
0,5 – la position du point D' et la courbe lors de la détente quasi-statique avec frottements.



1

-16- Représenter graphiquement sur le cycle le travail reçu par l'utilisateur et le travail reçu par le gaz dans le piston. Commentez

0,5 0,5



Q2 pour les adiabatiques $Q=0$ $W=\Delta U=nC_{Vm}\Delta T$

$\Delta S=0$

pour les isochores $W=0$ $Q=\Delta U=nC_{Vm}\Delta T$

$$\Delta S=\int_{T_i}^{T_f}\frac{\delta Q}{T}=\int_{T_i}^{T_f}nC_{Vm}\frac{dT}{T}$$

$$=nC_{Vm}\ln\frac{T_f}{T_i}$$

Q3 plusieurs manières :

méthode 1 $\Delta S_{cycle}=0$ $\Rightarrow \ln\frac{T_C}{T_B}+\ln\frac{T_A}{T_D}=0$

$$\Rightarrow \frac{T_C}{T_B}=\frac{T_D}{T_A}$$

méthode 2

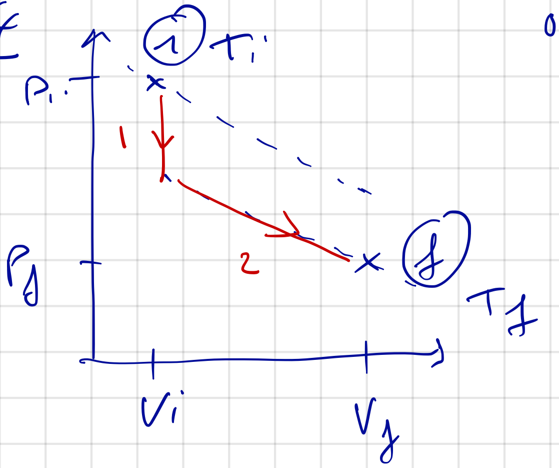
$TV^{\gamma-1}=cst$ sur les adiabatiques

$T_AV_A^{\gamma-1}=T_BV_B^{\gamma-1}$

$T_CV_C^{\gamma-1}=T_DV_D^{\gamma-1}$ or $V_B=V_C$ $V_A=V_D$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_D}=\frac{T_B}{T_C}$$

Q4



on prend le chemin

① $\Delta S_1=\int_{T_i}^{T_f}\frac{nC_{Vm}\,dT}{T}=nC_{Vm}\ln\frac{T_f}{T_i}$

② $dU=0=\delta Q+\delta W$

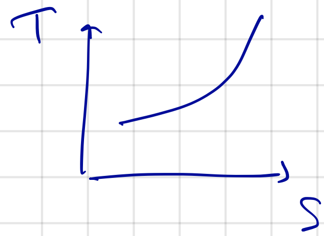
$\delta Q=p\,dV$

$$\Delta S_2=\int_{V_i}^{V_f}\frac{p\,dV}{T_f}=\frac{nR\cancel{T_f}}{\cancel{T_f}}\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S_1 = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \qquad \boxed{\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i}}$$

Q5 $V = cst$ $\quad \Delta S = nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i}$

$$T_f = T_i \, e^{\Delta S / nC_{vm}}$$



Q7 cycle $\quad Q + W = 0 \qquad Q = -W$

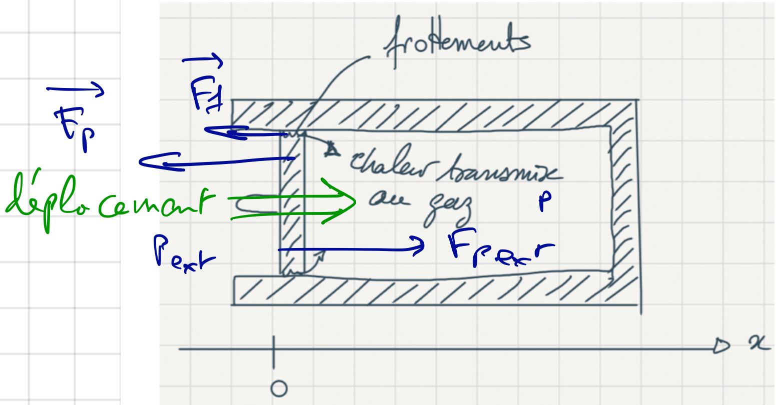
$$\delta Q = +T\,dS \qquad \delta W = -p\,dV$$

$$\int p\,dV = \int T\,dS$$

Q9 frottements $\Longrightarrow$ efficacité plus faible

si Q_{BC} reste le même $\quad W \downarrow$ par le même cycle

Q10 cas pour la compression



quasistatique $\quad \sum \vec{F} = \vec{0} \qquad P_{ext} S - pS - F_f = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{ext} = p + \frac{F_f}{S}}$$

pour la détente $\quad P_{ext} S - pS + F_f = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{ext} = p - \frac{F_f}{S}}$$

Q11 toute l'énergie de frottement $F_f\,dx = -F_f \frac{dV}{S}$
est convertie en chaleur $(dV = -S\,dx)$
pas d'autres échanges de chaleur $\delta Q = 0$
définition générale du travail $-p_{ext}\,dV$

$$dU_{comp} = \boxed{-\left(p + \frac{F_f}{S}\right) dV}$$

Q12 idem

$$dU_{det} = -p_{ext}\,dV$$
$$= \boxed{-\left(p - \frac{F_f}{S}\right) dV}$$

Q13

pour la compression

$$C_V\,dT = C_v\,dT = \boxed{-p\,dV - \frac{F_f}{S}\,dV}$$

pour la détente

$$C_v\,dT = \boxed{-p\,dV + \frac{F_f}{S}\,dV}$$

idem

$$dH = \boxed{\begin{aligned} C_p\,dT &= V\,dp - \frac{F_f}{S}\,dV \quad \text{compression} \\ &= V\,dp + \frac{F_f}{S}\,dV \quad \text{détente} \end{aligned}}$$

Q14

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{V\,dp - \frac{F_f}{S}\,dV}{-p\,dV - \frac{F_f}{S}\,dV} \quad \text{(compression)}$$

$$\Longrightarrow -\gamma p\,dV - \gamma \frac{F_f}{S}\,dV = V\,dp - \frac{F_f}{S}\,dV$$

tous les p d'un côté, tous les V de l'autre (séparation des variables)

$$\Longrightarrow \boxed{-\gamma \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p + \frac{F_f}{S}\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \qquad a = \frac{F_f}{S}\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Rq l'intégration est triviale
(pas demandée)

$$-\gamma \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p+a}$$

$$\ln V^{-\gamma} = \ln(p+a) + k$$

$$\Longrightarrow (p+a)V^{\gamma} = cst$$

<u>Q16</u> pour le travail reçu par le gaz, c'est le cycle A', B', C', D'

pour le travail reçu par l'utilisateur il faut retirer les bandes $-\frac{F_1}{S}dV$ et $+\frac{F_1}{S}dV$ liées aux frottements et changer le signe.